Descripción estadística

$\langle \hat{A} \rangle_\psi = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$

$\hookrightarrow \langle \hat{x} \rangle = \int d^3r\, \psi^*(\vec{r})\, x\, \psi(\vec{r})$

$\langle \hat{p} \rangle = \int d^3r\, \psi^*(\vec{r}) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi(\vec{r})$

III.C.5

7.2. Desviación RMS de dos observables conjugados

RMS deviation

- ¿$\langle A \rangle$ refleja el centro de masa de los resultados obtenidos pero cuál es su dispersión?
- Podríamos estar tentados a definir $\langle A - \langle A \rangle \rangle$ pero esto $\langle A \rangle - \langle A \rangle = 0$
- por eso definimos

$$(\Delta A)^2 = \left\langle (A - \langle A \rangle)^2 \right\rangle$$

Usando la expresión para el promedio obtenemos

$$\Delta A = \sqrt{\langle \psi | (A - \langle A \rangle)^2 | \psi \rangle}$$

que podemos escribir de manera distinta como

$$\begin{aligned} \left\langle (A - \langle A \rangle)^2 \right\rangle &= \left\langle A^2 - 2\langle A \rangle A + \langle A \rangle^2 \right\rangle \\ &= \langle A^2 \rangle - 2\langle A \rangle^2 + \langle A \rangle^2 \\ &= \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 \end{aligned}$$

$\sigma = \sqrt{\text{Varianza}}$

$\text{Varianza} = E\left[\left(X - E[X]\right)^2\right]$

por lo tanto la desviación RMS está dada por

$$\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$$

- Veremos que al aplicar esto a los observables $\mathbf{R}$ y $\mathbf{P}$ obtendremos

$$\begin{aligned} \Delta X \cdot \Delta P_x &\geq \hbar/2 \\ \Delta Y \cdot \Delta P_y &\geq \hbar/2 \\ \Delta Z \cdot \Delta P_z &\geq \hbar/2 \end{aligned}$$

para $\hat{X}$

$\Delta x^2 = \int \psi^*(x) (x - \bar{x})^2 \psi(x)\, dx$

$= \int (x - \bar{x})^2 \underbrace{|\psi(x)|^2}_{p(x)}$

CT III D

6. Implicaciones físicas de le Ec. de Schrödinger

(CT III.D.1)

6.1. Evolución determinista

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$$

- De primer orden en t. Dado un estado inicial $|\psi(t_0)\rangle$ el estado a cualquier tiempo subsecuente $|\psi(t)\rangle$ está determinado.
- No hay indeterminación en la evolución del estado cuántico.
- La indeterminación aparece sólo hasta que se hace una medición.
- Entre mediciones el estado evoluciona de manera determinista.

La condición inicial es un $|\Psi(t_0)\rangle$

$\Psi_0(\vec{p}) = \langle\vec{p}|\Psi(t_0)\rangle \qquad \Psi_0(\vec{r}) = \langle\vec{r}|\Psi(t_0)\rangle$

$\therefore$ $|\Psi_0(t)\rangle$ determina $\Psi_0(\vec{p})$ y $\Psi_0(\vec{r})$ y estas están relacionadas a través de una $\tilde{F}T$. A diferencia del caso clásico.

III D

Consecuencias de la Ec. de Schrödinge

6.2. Principio de superposición

- La ecuación de Schrödinger es lineal y homogénea.
- i.e. se puede escribir como

$$\left[i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - H(t)\right]|\psi(t)\rangle = 0$$

- Se sigue entonces que si tenemos dos soluciones $|\psi_1(t)\rangle$ y $|\psi_2(t)\rangle$ y el estado inicial del sistema es $|\psi(t_0)\rangle = \lambda_1|\psi_1(t_0)\rangle + \lambda_2|\psi_2(t_0)\rangle$, al tiempo t este habrá evolucionado a $|\psi(t)\rangle = \lambda_1|\psi_1(t)\rangle + \lambda_2|\psi_2(t)\rangle$
- Por tanto podremos hablar de un operador lineal de evolución temporal $U(t_0, t)$ que cumple

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle$$

- Podemos empezar a ver que $U(t, t_0) = e^{-iH(t-t_0)/hbar}$.

6.3. Conservación de probabilidad

Conservación de norma

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\psi(t)|\right]|\psi(t)\rangle + \langle\psi(t)|\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi(t)\rangle\right]$
- Usando $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar}H(t)|\psi(t)\rangle$ y $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\psi(t)| = -\frac{1}{i\hbar}\langle\psi(t)|H^\dagger(t)$
- Obtenemos $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = -\frac{1}{i\hbar}\langle\psi(t)|H(t)|\psi(t)\rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle\psi(t)|H(t)|\psi(t)\rangle = 0$
- Esta propiedad es indispensable para interpretar $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2$ como la densidad de probabilidad de posición.